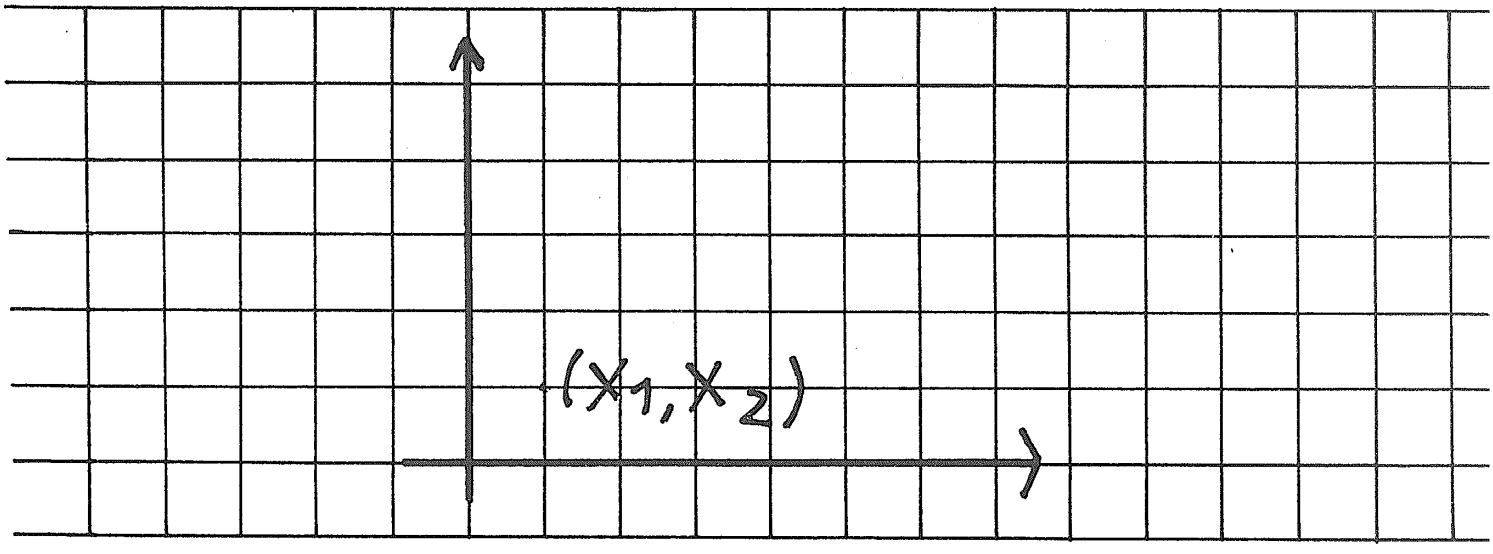
GEOMETRÍA MÉTRICA EN EL PLANO

Obras que integran el bloque 4 *(Geometría euclidiana)*:

1. Conjuntos de puntos
2. Relaciones binarias
3. Figuras planas
4. El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos
5. Polígonos convexos
6. Relación de semejanza
7. ***Geometría métrica en el plano***
8. Cuerpos geométricos

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 4

Geometría euclidiana

Módulo 7

GEOMETRÍA MÉTRICA EN EL PLANO

Conrado Flores García

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
GEOMETRÍA MÉTRICA EN EL PLANO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya.
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1984
ISBN 968-24-1246-3

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

7.1 Perímetros

7.2 Áreas

7.3 Perímetros y áreas. Ejercicios

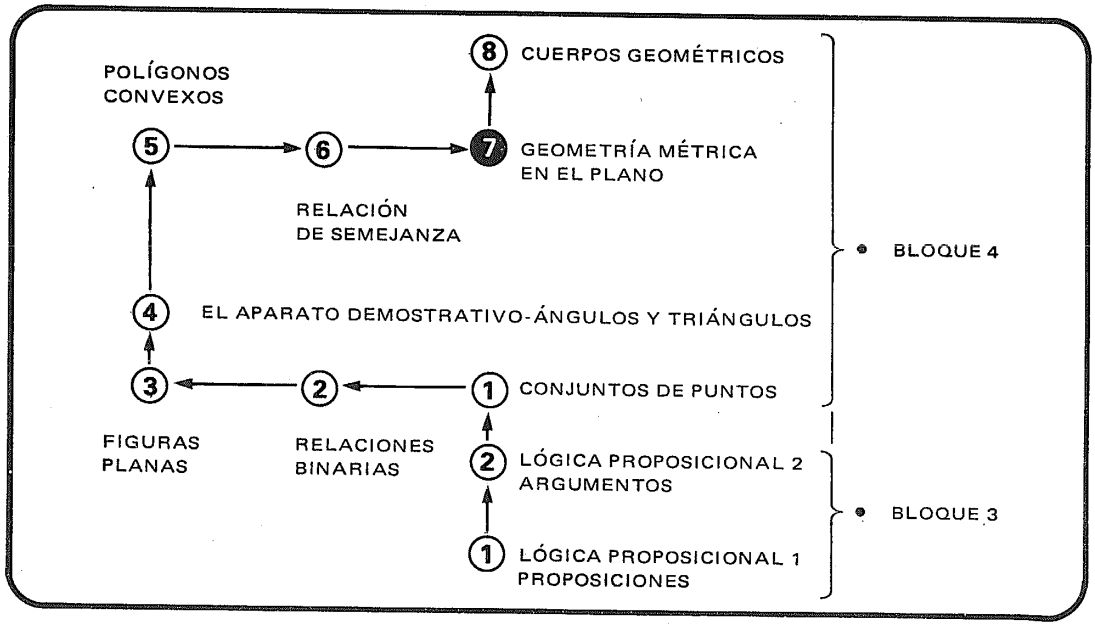
7.4 Perímetros y áreas de figuras semejantes

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 4. Geometría euclidiana

Objetivos: establecer algunos hechos geométricos relacionados con ciertos conjuntos de puntos y demostrar determinados teoremas a partir de un grupo dado de axiomas o postulados básicos, aplicando las reglas del juego de la lógica

Esquema estructural del bloque 4



Módulo 7. Geometría métrica en el plano

Objetivos: determinar perímetros y áreas de algunas figuras planas

Prerrequisitos:

	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética y la raíz cuadrada		

7.1

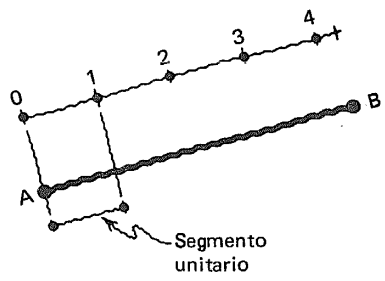
Perímetros

1

Hemos hablado de

medida de un segmento

como un número
real no negativo
con él asociado
y que
representa las
veces que un
segmento
considerado
como unidad
"cabe" en
dicho segmento.

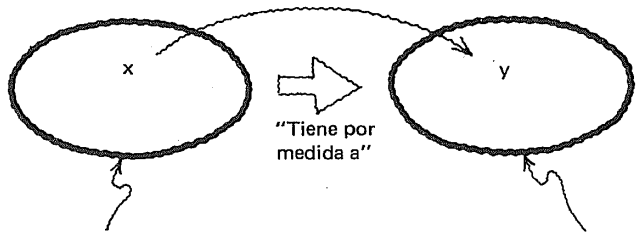


2

Generalizaremos, ahora,
el concepto de medida
como una relación binaria
que asocia a
cada uno de los elementos
de un conjunto dado
un número real no
negativo.

3

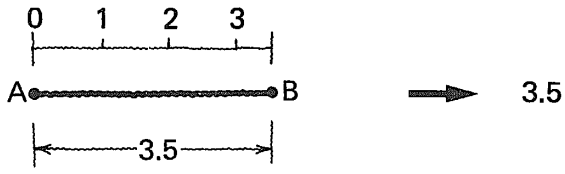
Por ejemplo:



$S = \{ x/x \text{ es un segmento de recta} \}$

$M = \{ y/y \in R \wedge y \geqslant 0 \}$

4



Decimos que:

el segmento $\overrightarrow{AB}$

"tiene por medida al"

número real no negativo 3.5
lo cual hemos simbolizado así:

$|\overrightarrow{AB}| = 3.5$

5

Hablaremos, ahora, de

medida de longitud,

cuando nos refiramos
a la medida de un
segmento de recta.

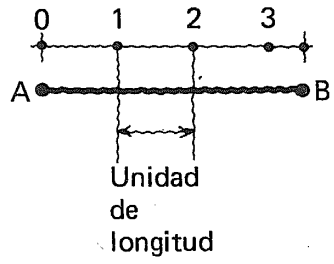
Si $|\overrightarrow{AB}| = 3.5$

diremos que *el segmento* $\overrightarrow{AB}$ *mide* 3.5 *unidades de longitud,*
o que **el segmento** $\overrightarrow{AB}$ *"tiene una longitud de"* **3.5 unidades.**

6

Unidad de longitud

será el segmento unitario considerado.



7

De manera similar, hablaremos de

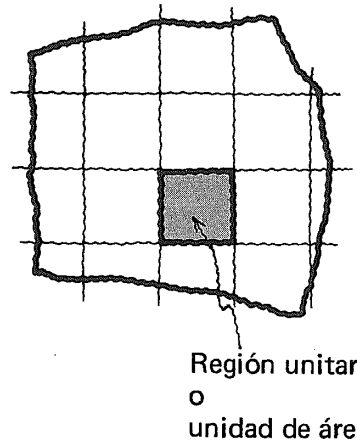
medida de área

cuando nos refiramos a la medida de una región poligonal.

8

Área de una región poligonal

será el número real no negativo asociado con dicha región, y que representará las veces que una región considerada como unidad "cabe" en la región dada.



9

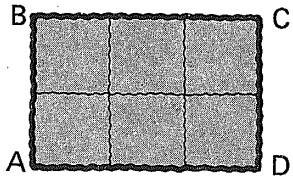
Por ejemplo:

la región rectangular ABCD
"tiene por medida al"
número real no negativo 6,

la región rectangular ABCD
***"mide"* 6 unidades de área,**

o

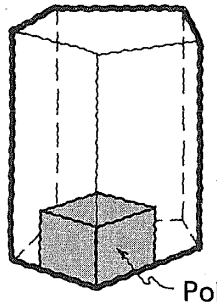
la región rectangular ABCD
***"tiene un área de"* 6 unidades.**



10

Volumen de un "poliedro sólido".*

Será el número real no negativo asociado con dicho poliedro y que representará las veces que un poliedro sólido considerado como unidad "cabe" en el poliedro dado.



Poliedro unitario
o
unidad de volumen

* Posteriormente se definirá un poliedro sólido.

11

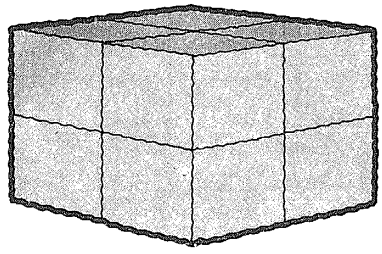
Por ejemplo:

El cubo representado
"tiene por medida al"
número real no negativo 8,

el cubo representado *"mide"*
8 unidades de volumen,

o

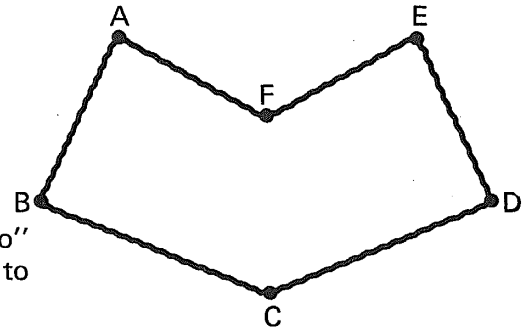
el cubo representado
***"tiene un volumen de"* 8 unidades.**



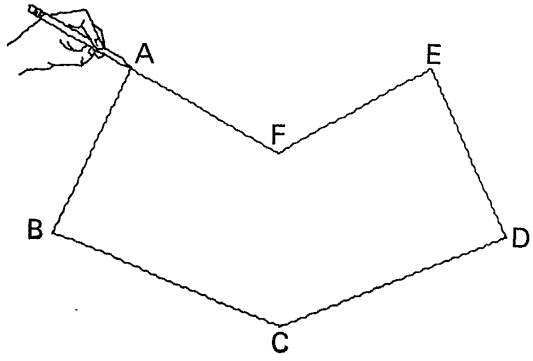
12

Consideremos ahora el polígono ABCDEF.

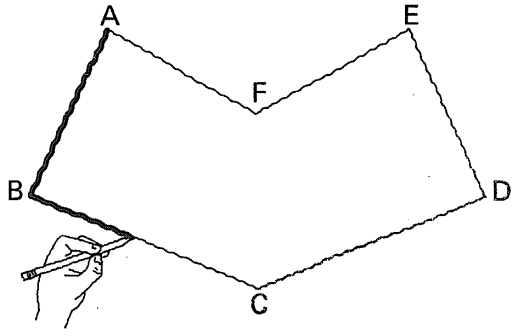
Recorramos su frontera o "contorno" partiendo de un punto hasta llegar nuevamente a él.



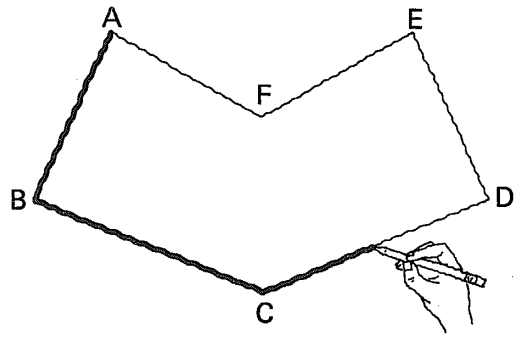
13



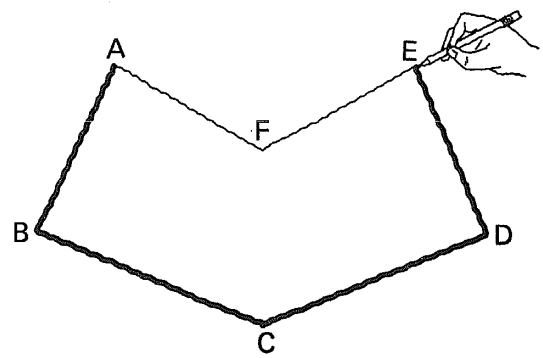
14



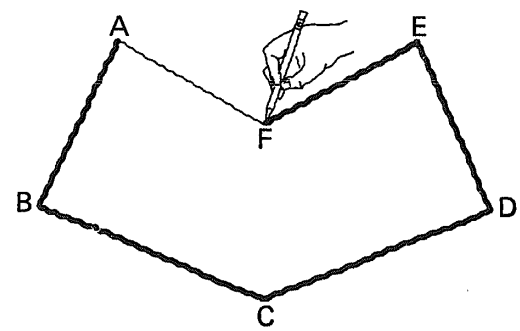
15



16



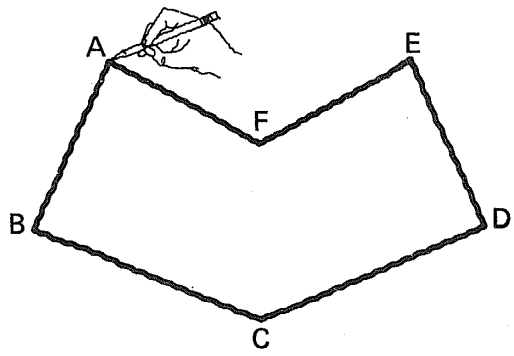
17



18

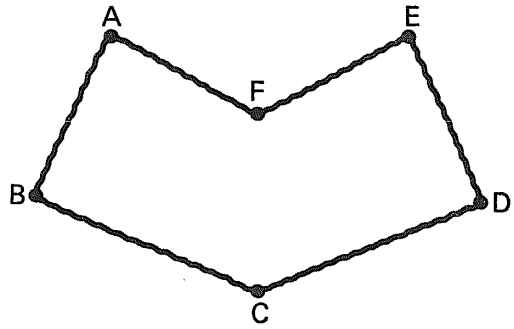
A la longitud
de este contorno
le llamaremos

perímetro.



19

El **perímetro**
de un polígono
(o región poligonal)
será igual a la
suma de las
longitudes (o de las
medidas de longitud)
de los lados.

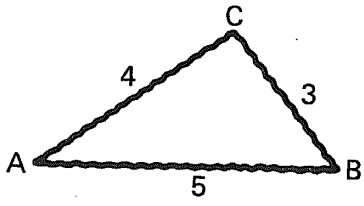


Perímetro de ABCDEF $= |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}| + |\overline{DE}| + |\overline{EF}| + |\overline{FA}|$

20

Perímetro del $\triangle ABC$ = ⌊____⌋

= ⌊____⌋



5 + 3 + 4

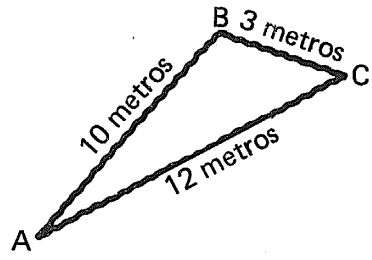
(sumandos tomados
en cualquier orden)

12 unidades de longitud

21

Perímetro del $\triangle ABC$ = ____

= ____



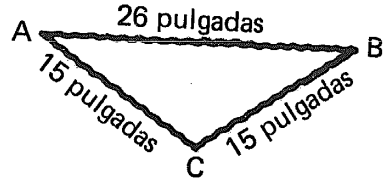
$10 + 12 + 3$

25 metros

22

Perímetro del $\triangle ABC$ = ____

= ____



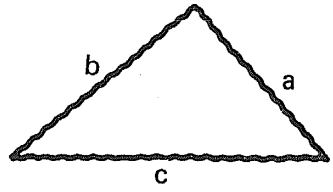
$26 + 15 + 15$

56 pulgadas

23

Perímetro de un triángulo escaleno

= ____

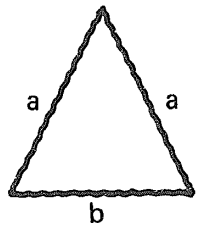


$a + b + c$

24

Perímetro de un triángulo isósceles (no equilátero)

$= \lfloor\_\_\_\_\_\rfloor$

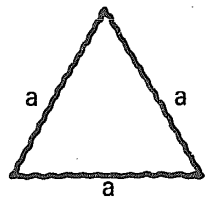


$2a + b$

25

Perímetro de un triángulo equilátero

$= \lfloor\_\_\_\_\rfloor$

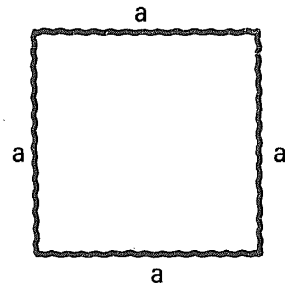


$3a$

26

Perímetro de un cuadrado

$= \lfloor\_\_\_\_\rfloor$

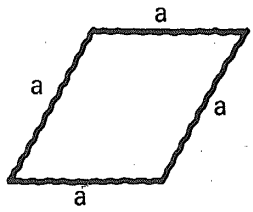


$4a$

27

Perímetro
de un rombo

= ⌊____⌋

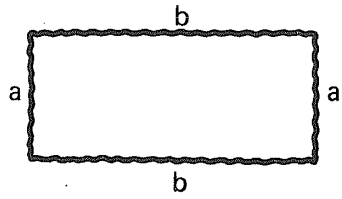


4a

28

Perímetro
de un rectángulo

= ⌊_____⌋

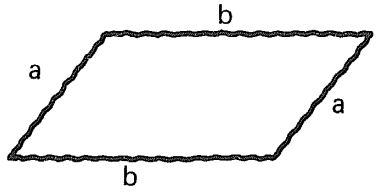


2a + 2b
ó
2 (a + b)

29

Perímetro
de un paralelogramo

= ⌊_____⌋

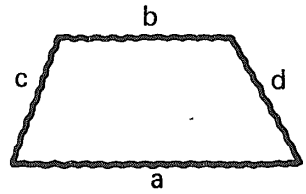


2a + 2b
ó
2(a + b)

30

Perímetro de un trapecio no paralelogramo

$= \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

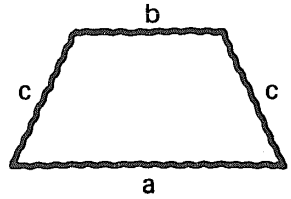


$a + b + c + d$

31

Perímetro de un trapecio isósceles

$= \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

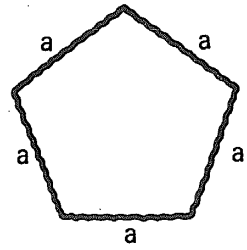


$a + b + 2c$

32

Perímetro de un pentágono regular convexo

$= \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$



5a

33

Perímetros de un

polígono regular convexo de n lados

de longitud a = ⌊_____⌋

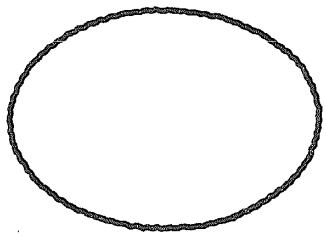
na

34

Consideremos
ahora una

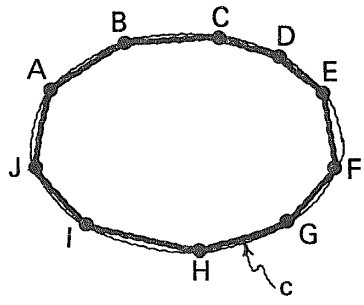
curva cerrada simple

no poligonal.



35

En forma aproximada,
el perímetro de la
curva cerrada simple (c)
representada
es igual al perímetro
del polígono
ABCDEFGHIJ "*inscrito* en" la
curva cerrada simple.

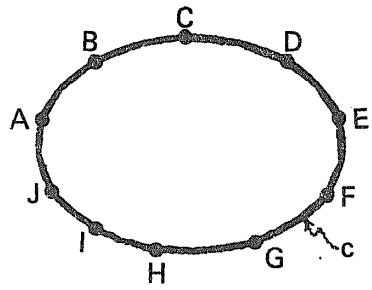


Podemos escribir:

Perímetro de c > perímetro del polígono ABCDEFGHIJ

36

Entre más vértices consideremos para el polígono inscrito, el perímetro de éste se acercará más y más al perímetro de la curva cerrada simple, (c).

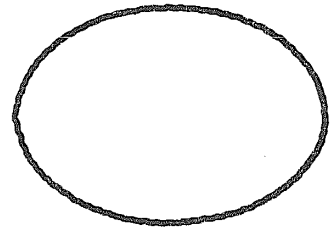


37

En el "límite*" de este proceso, tendremos un número real no negativo que representará el

perímetro de la curva

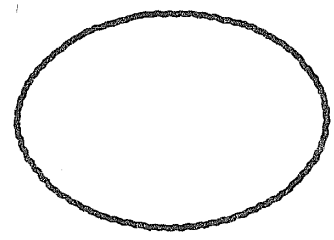
cerrada simple.



* Confiamos en nuestra noción intuitiva de "límite".

38

Más adelante tendremos oportunidad de abordar el problema de determinar en forma exacta el perímetro de una curva cerrada simple no poligonal.

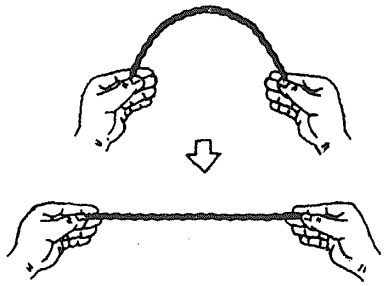


39

Por el momento, podemos visualizar una generalización del concepto de

longitud,

haciéndolo extensivo a cualquier "segmento" (no necesariamente rectilíneo).



40

¿Cómo determinar el

perímetro de un círculo

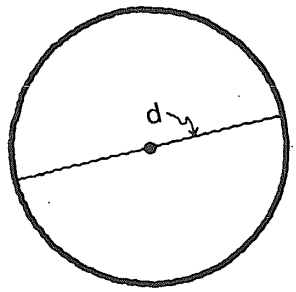
o

la longitud de una

circunferencia

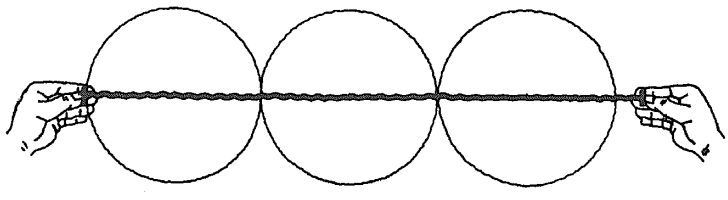
de

diámetro **d**?



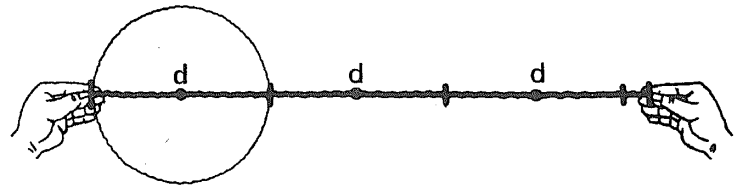
41

Si pudiéramos hacer coincidir un hilo con la circunferencia, y luego extenderlo y colocarlo sobre un diámetro,



veríamos que la longitud del hilo es igual a **3** veces la longitud del diámetro más una pequeña fracción.

42

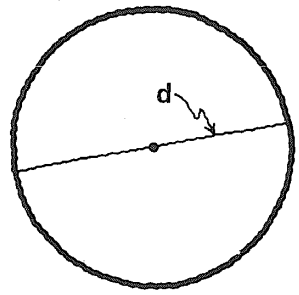


Longitud de la circunferencia
= 3 (longitud del diámetro) + una fracción.

43

Los matemáticos han llegado a determinar que esta **razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro** es un número irracional (es decir, que no se puede expresar en la forma $\frac{a}{b}$), lo han designado con la letra griega π y su valor aproximado es

3.1416...



44

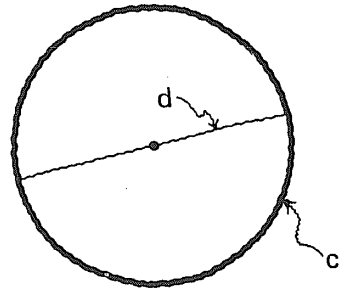
Si
c representa la longitud de la circunferencia y
d la longitud del diámetro

$$\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \pi$$

de donde

$$\mathbf{c} = \pi\,\mathbf{d}$$

siendo $\pi \doteq 3.1416$



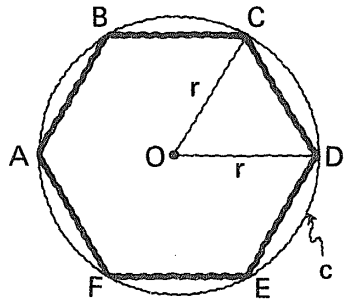
45

Consideremos el exágono regular convexo ABCDEF

inscrito

en la circunferencia c.

Los vértices están en la circunferencia y los lados son cuerdas de la circunferencia.



Por definición de exágono regular convexo:

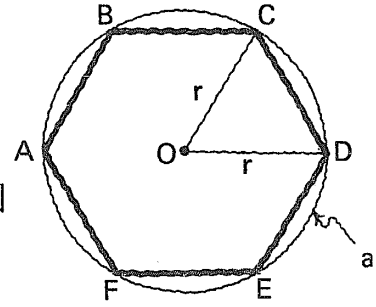
$|\overrightarrow{AB}| \cong |\overrightarrow{BC}| \cong |\overrightarrow{CD}| \cong |\overrightarrow{DE}| \cong |\overrightarrow{EF}| \cong |\overrightarrow{FA}|$

46

Tomemos uno cualquiera de los 6 triángulos congruentes determinados por los radios y los lados del exágono, por ejemplo: el $\triangle COD$.

Sabemos que: $\measuredangle COD =$ [ ]

porque [ ]



60°

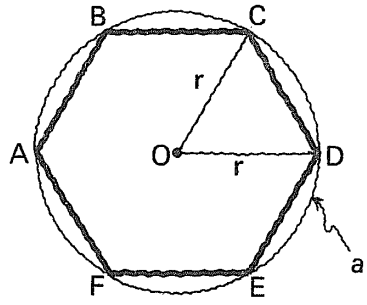
es un ángulo central cuya medida es $360°/6 = 60°$

47

$\measuredangle OCD =$ [ ]

$\measuredangle ODC =$ [ ]

porque [ ]



60°

60°

$\measuredangle OCD = \measuredangle ODC$ por ser ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles. (T11)
$2\measuredangle OCD = 180° - \measuredangle COD$
$= 180° - 60° = 120°$
$\measuredangle OCD = \measuredangle ODC$
$= 120°/2 = 60°$

48

Hemos encontrado que

$\measuredangle COD = \measuredangle OCD = \measuredangle ODC = 60°$

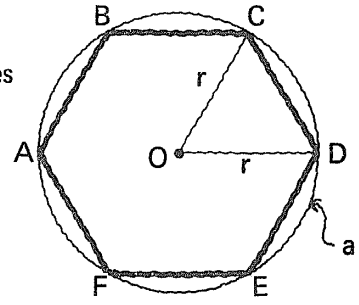
Por tener sus tres ángulos interiores congruentes, al $\triangle OCD$ es

[_____]

Si el $\triangle OCD$ es [_____]

también es [_____]

y a = [___]



equiángulo

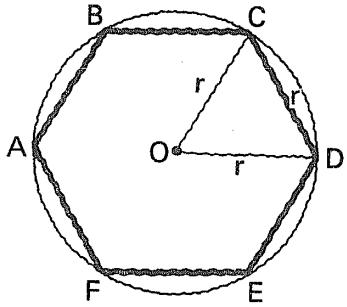
equiángulo

equilátero

r

49

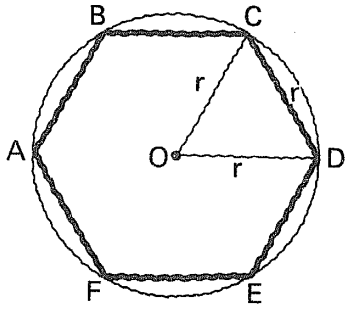
El perímetro del exágono ABCDEF es igual a: [____]



6 r

50

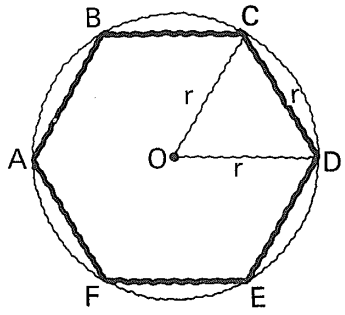
La razón del perímetro del exágono ABCDEF al radio es igual a: [____]



$\frac{6r}{r} = 6$

51

La razón del perímetro
del exágono ABCDEF
al diámetro de la circunferencia
en que se encuentra inscrito,
es igual a: [_____]



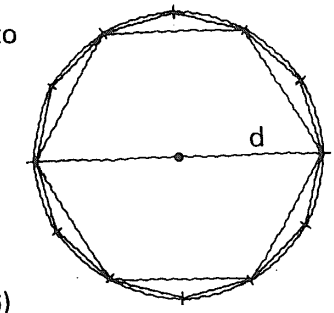
3

52

A medida que el número de lados
del polígono regular convexo inscrito
aumenta,
la razón de su perímetro
al diámetro de la circunferencia
aumenta acercándose a: π

Para el exágono: 3

Para la circunferencia: π ($\doteq$ 3.1416)

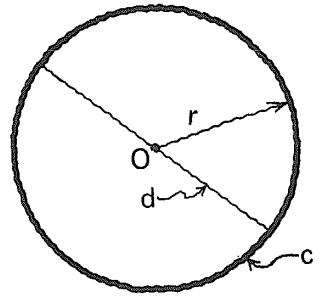


53

Entonces, podemos escribir:

longitud de la circunferencia:

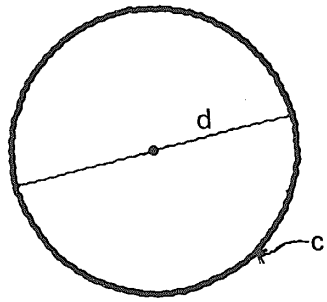
$c = \pi d$
ó
$c = 2\pi r$



54

d = 1 metro

c ≐ ⌊_____⌋

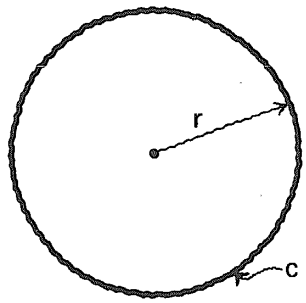


3.1416 metros

55

r = 3 centímetros

c ≐ ⌊_____⌋



18.85 centímetros

4.7.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

4.7.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *interpretar* la longitud, el área y el volumen como casos particulares de relaciones de medida entre conjuntos de puntos y el conjunto de los números reales no negativos,
- *explicar* lo que es el perímetro de un polígono y de una curva cerrada simple no poligonal,
- *determinar* el perímetro de un polígono, dados sus lados,
- *determinar* la longitud de una circunferencia de radio o diámetro dado.

7.2

Áreas

56

Llamaremos

regiones poligonales congruentes

a las determinadas por polígonos congruentes.

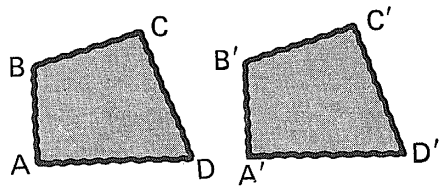
57

Estudiemos con atención estas dos **propiedades de las áreas.**

1. Si dos regiones son congruentes, sus áreas son iguales.
2. Si A y B son regiones poligonales y su intersección está constituida por vértices, lados, o es el conjunto vacío, entonces el área de la unión de las dos regiones poligonales es igual a la suma de sus áreas.

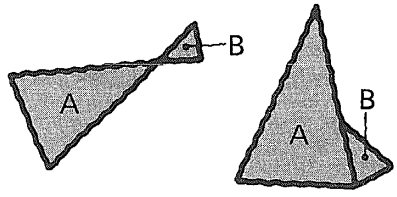
Ver cuadros siguientes.

58



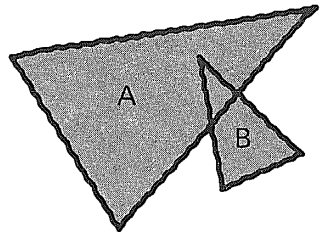
- Polígono ABCD $\cong$ polígono A′B′C′D′.
- Región poligonal ABCD $\cong$ región poligonal A′B′C′D′.
- Área de la región poligonal ABCD = área de la región poligonal A′B′C′D′.

59



- Área de $A \cup B$ = área de A + área de B

60



- Área de $A \cup B$ < área de A + área de B

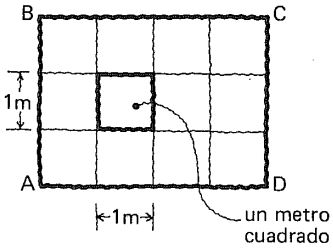
  o bien

- Área de $A \cup B$ = área de A + área de B − área de $A \cap B$

61

Si la unidad de área (o superficie) considerada es el **metro cuadrado** decimos que la región poligonal representada tiene un área de.

$4 \times 3 = 12$ metros cuadrados

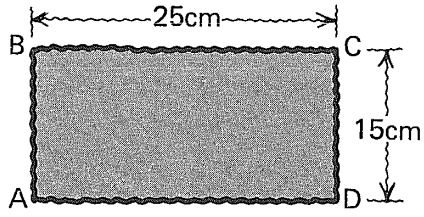


62

Área de la región rectangular ABCD

= ⌊_____⌋

= ⌊_____⌋



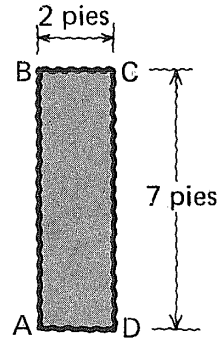
25×15

$375\ cm^2$
(centímetros cuadrados)

63

Área de la región rectangular ABCD

= ⌊_____⌋

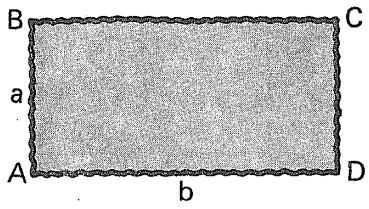


$14\ pies^2$
(pies cuadrados)

64

En general,
definiremos:

Área de la
región rectangular ABCD
= ab

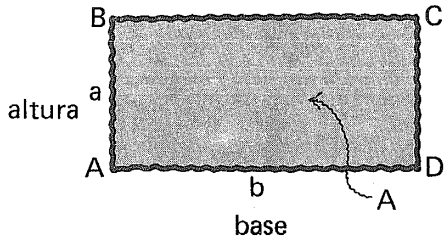


65

Si ABCD
es un rectángulo

A = ba

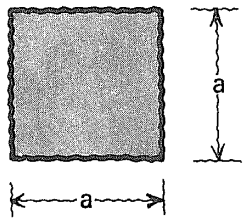
El área de una región rectangular es igual al producto de la base y la altura.



66

Área de una región cuadrada

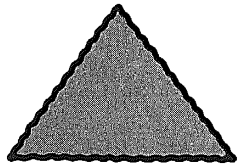
A = ⌊_____⌋



$a \cdot a = a^2$

67

Vamos, ahora, a
determinar el área
de una región triangular.



68

$\overleftrightarrow{BD}$ es la altura
correspondiente al vértice B.

$\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

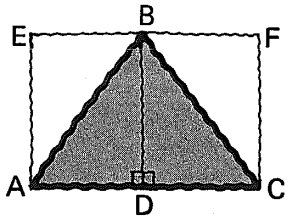
por lo tanto,

$\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ por transitividad .

$\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ y $B \in \overleftrightarrow{EF}$

Como $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ y $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

podemos afirmar que AEFC es un



paralelogramo

69

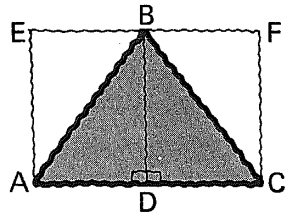
$\measuredangle BDA = \measuredangle BDC = 90°$

por definición de altura.

Como $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

y $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$

entonces, por teorema 8.

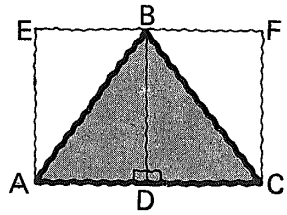


$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AE}$

y $\measuredangle EAC =$ 90°

70

Por tener al menos un ángulo recto el paralelogramo AEFC es un



rectángulo

71

Podemos afirmar que:

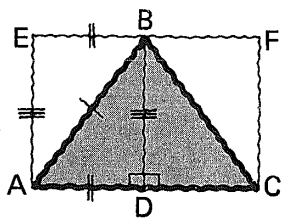
$\triangle AEB \cong \triangle ADB$

porque

y que:

$\triangle BFC \cong \triangle BDC$

porque



$\overleftrightarrow{AB} \cong \overleftrightarrow{AB}$ reflexividad de la congruencia

$\overleftrightarrow{EB} \cong \overleftrightarrow{AD} \wedge \overleftrightarrow{AE} \cong \overleftrightarrow{BD}$ (T2)

$\triangle AEB \cong \triangle ADB$ por C1 • III

(razonamiento similar)

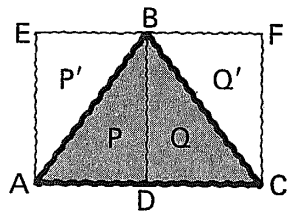
72

Entonces:

- $\blacktriangle P \cong \blacktriangle P'$
- $\blacktriangle Q \cong \blacktriangle Q'$

y

- área $\blacktriangle P$ = área $\blacktriangle P'$ (1)
- área $\blacktriangle Q$ = área $\blacktriangle Q'$ (2)



73

Sumando miembro a miembro (1) y (2) obtenemos:

$$\underbrace{\text{área } \blacktriangle P + \text{área } \blacktriangle Q}_{\text{área } \blacktriangle ABC} = \underbrace{\text{área } \blacktriangle P' + \text{área } \blacktriangle Q'}_{\text{área } (\blacktriangle P' \cup \blacktriangle Q')}$$

Por la segunda propiedad de las áreas.

74

Luego,

área $\blacksquare AEFC = 2(\text{área } \blacktriangle ABC)$

por la segunda propiedad de las áreas,

de donde:

$$\textbf{área } \blacktriangle ABC = \frac{\text{área } \blacksquare AEFC}{2} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AE}|}{2}$$

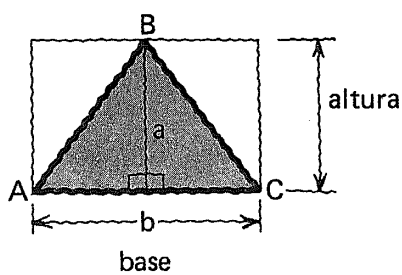
75

Tenemos,
entonces, que:

Área de una
región triangular

$$A = \frac{ba}{2}$$

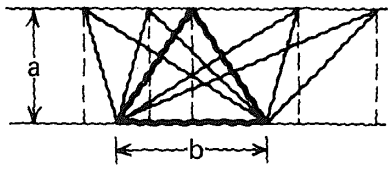
El área de una región triangular es igual al semiproducto de la base y la altura.



76

$$A = \frac{ba}{2}$$

Debemos observar que todas las regiones triangulares mostradas en el croquis tienen la misma área, porque tienen la misma base y la misma altura.



77

A partir del área de una región triangular podemos determinar las áreas de los restantes regiones poligonales.

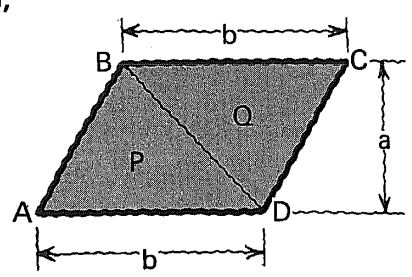
78

Área de una región romboidal,

dadas la base y la altura; a partir de las áreas de las regiones triangulares P y Q.

A = [ ]

porque [ ]



- b · a
- área ▲P = $\frac{ba}{2}$
- área ▲Q = $\frac{ba}{2}$
- área región romboidal ABCD = $2 \cdot \frac{ba}{2} = ba$

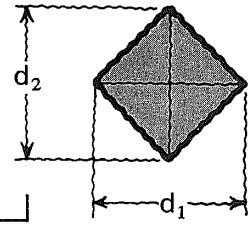
79

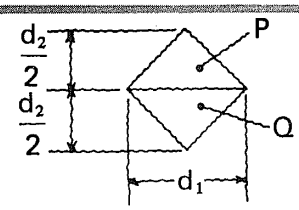
Área de una región romboidal,

dadas sus dos diagonales:

A = [ ]

porque [ ]





- $\frac{d_1 d_2}{2}$

- área▲P = $\frac{d_1 d_2}{4}$ = área▲Q
- área región romboidal.
- $= 2 \cdot \frac{d_1 d_2}{4} = \frac{d_1 d_2}{2}$

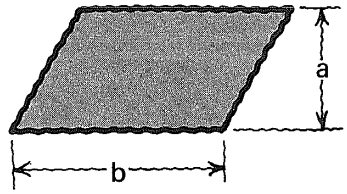
80

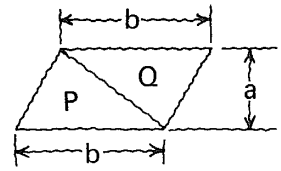
Área de una

región "paralelogramal".

A = [ ]

Porque [ ]





- ba

- área P = $\frac{ba}{2}$
- área Q = $\frac{ba}{2}$
- área P ∪ Q = $2 \cdot \frac{ba}{2} = ba$

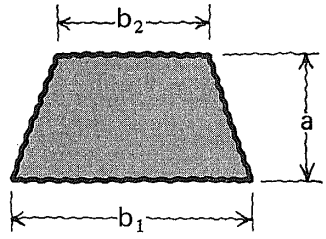
81

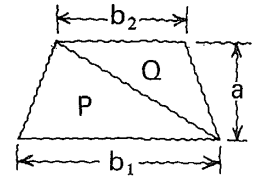
Área de una

región trapecial:

A = [ ]

porque [ ]





- $\frac{(b_1 + b_2)a}{2}$

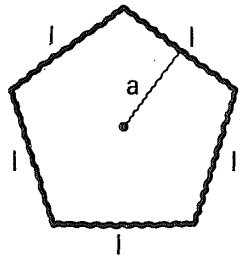
- área P = $\frac{b_1 a}{2}$
- área Q = $\frac{b_2 a}{2}$
- área (P ∪ Q) = $\frac{b_1 a + b_2 a}{2}$

82

Área de una

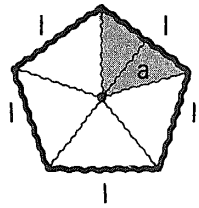
región pentagonal regular convexa

en función del perímetro (p)
y el apotema (a):



A = ⌊_____⌋

porque ⌊_____⌋



- $\frac{pa}{2}$

área de cada región triangular = $\frac{la}{2}$

área de la unión de las
5 regiones triangulares = $\frac{5la}{2}$

pero 5l = p

de donde:

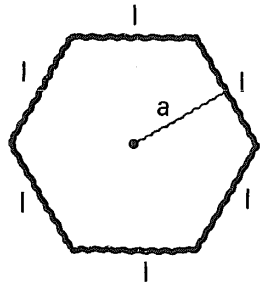
área región pentagonal = $\frac{pa}{2}$

83

Área de una

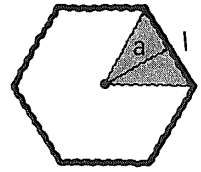
región exagonal regular convexa

en función del perímetro (p)
y el apotema (a):



A = ⌊_____⌋

porque ⌊_____⌋



- $\frac{pa}{2}$

área de cada región triangular = $\frac{la}{2}$

área de la unión de las
6 regiones triangulares = $\frac{6la}{2}$

pero 6l = p

de donde:

área región exagonal = $\frac{pa}{2}$

84

Área de una

región poligonal regular convexa

de n lados, en función del perímetro
(p) y el apotema (a):

A = ⌊_____⌋

porque ⌊_____⌋

- $\frac{pa}{2}$

área de cada región triangular = $\frac{la}{2}$

área de la unión de las n regiones
triangulares = $\frac{nla}{2}$

pero nl = p

de donde:

área región poligonal = $\frac{pa}{2}$

85

El **área** de una

región poligonal regular convexa

de n lados es igual al

semiproducto del perímetro y el apotema.

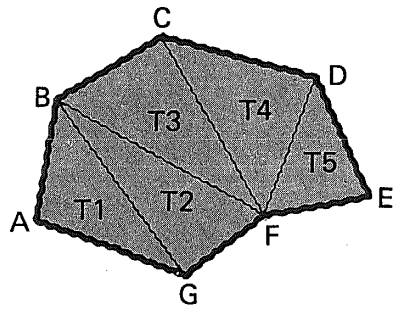
$$A = \frac{pa}{2}$$

86

El área de una

región poligonal cualquiera

puede ser determinada dividiendo la región dada en regiones triangulares, intersecadas únicamente en lados o vértices;



por ejemplo:

- área región poligonal ABCDEFG

= área (▲T1 ∪ ▲T2 ∪ ▲T3 ∪ ▲T4 ∪ ▲T5)

= área ▲T1 + área ▲T2 + área ▲T3 + área ▲T4 + área ▲T5

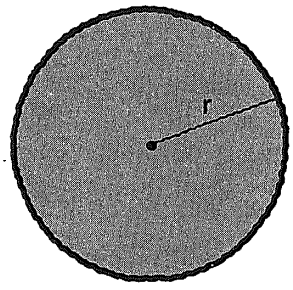
87

Necesitamos, ahora, deducir una expresión para calcular el

área

de una

region circular o círculo.

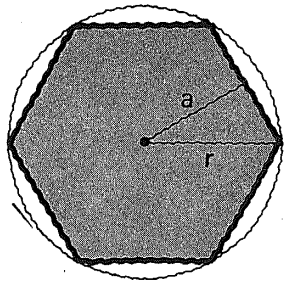


88

Hemos encontrado
que el **área** de una

región poligonal regular convexa

es igual a: [_____]



Simbólicamente: [_____]

el semi-producto del
perímetro y el apotema

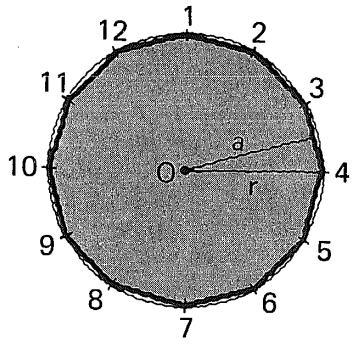
$$A = \frac{pa}{2}$$

89

$$A = \frac{pa}{2}$$

Podemos observar que,
a medida que el número de
lados del polígono aumenta,
el perímetro también aumenta
y se aproxima a la longitud de
la circunferencia, de
modo que en el "límite"
del proceso:

$$p = 2\pi r$$



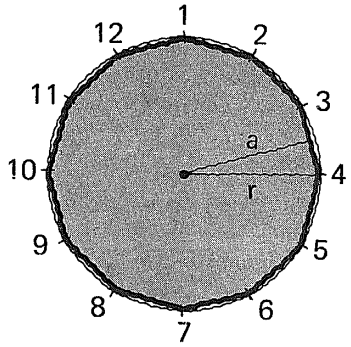
90

$$A = \frac{pa}{2}$$

$$p = 2\pi r$$

También, a medida que
el número de lados del polígono
aumenta, el apotema* aumenta
aproximándose al radio, de modo
que en el "límite" se tiene:

$$a = r$$



* Usamos el término *apotema*, así como los de *radio*, *diámetro*, etc., con las connotaciones de "segmento" y "longitud del segmento".

91

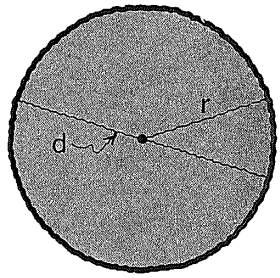
Para una región poligonal regular convexa:

$A = \frac{pa}{2}$

Si el número de lados aumenta:

$p \longrightarrow 2\pi r$

$a \longrightarrow r$



Para el círculo:

$A = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$

$A = \pi r^2$

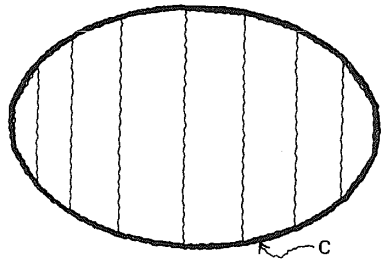
o bien $A = \frac{\pi d^2}{4}$ puesto que $r = \frac{d}{2}$

92

El **área** de una

región determinada por una curva cerrada simple no poligonal (c)

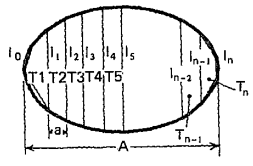
puede calcularse, en forma aproximada, dividiendo la región en regiones trapeciales.



93

Dividamos la dimensión A en n partes congruentes de longitud (a):

área región trapecial T1 = ____ ,
área región trapecial T2 = ____ ,
área región trapecial T3 = ____ ,
área región trapecial T4 = ____ ,
área región trapecial T5 = ____ ,
área región trapecial T_{n-1} = ____ ,
área región trapecial Tn = ____ ,



$(l_0 + l_1)\, a/2$
$(l_1 + l_2)\, a/2$
$(l_2 + l_3)\, a/2$
$(l_3 + l_4)\, a/2$
$(l_4 + l_5)\, a/2$
$(l_{n-2} + l_{n-1})\, a/2$
$(l_{n-1} + l_n)\, a/2$

94

área región trapecial T1 $= (l_0 + l_1)\, a/2$
área región trapecial T2 $= (l_1 + l_2)\, a/2$
área región trapecial T3 $= (l_2 + l_3)\, a/2$
área región trapecial T4 $= (l_3 + l_4)\, a/2$
área región trapecial T5 $= (l_4 + l_5)\, a/2$

área región trapecial $T_{n-1} = (l_{n-2} + l_{n-1})\, a/2$
área región trapecial $T_n = (l_{n-1} + l_n)\, a/2$

área región c = ⌊_____⌋

$(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + 2l_4 + \ldots 2l_{n-1} + l_n)\, a/2$

95

área región c $= (l_0 + 2l_1 + 2l_2 + 2l_3 + 2l_4 + \ldots + 2\, l_{n-1} + l_n)\, a/2$

área región c $= (\frac{l_0}{2} + l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + \ldots + l_{n-1} + \frac{l_n}{2})\, a$

Esta última expresión, que se conoce con el nombre de

fórmula de Simpson

nos permite calcular, en forma aproximada, el área de una región determinada por una curva cerrada simple no poligonal.

4.7.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *deducir* las expresiones para el cálculo del área de las siguientes regiones poligonales:

  —rectangular
  —cuadrada o romboidal
  —paralelogramal
  —trapecial
  —poligonal regular convexa

- *deducir* la expresión para el cálculo del área de un círculo,

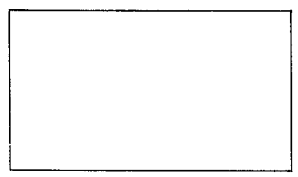
- *explicar* el criterio para calcular el área de una región poligonal irregular,

- *deducir* una expresión para el cálculo de áreas de regiones determinadas por curvas cerradas simples no poligonales (fórmula de Simpson).

7.3

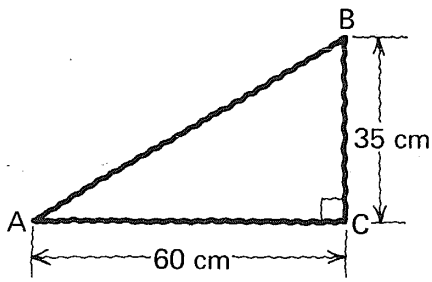
Perímetros y Áreas.
Ejercicios

96



Perímetro △ABC

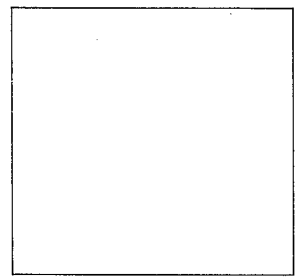
≐ ⌊_____⌋



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2}$$
$$= \sqrt{60^2 + 35^2}$$
$$= \sqrt{3600 + 1225}$$
$$= \sqrt{4825}$$
$$\doteq 69.46$$

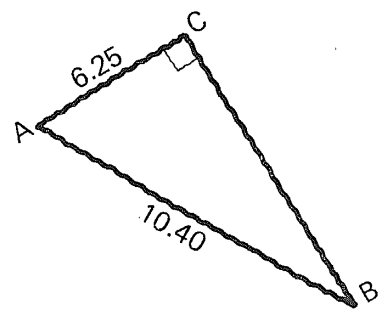
$60 + 35 + 69.46 = 164.46$ cm

97



Perímetro △ABC

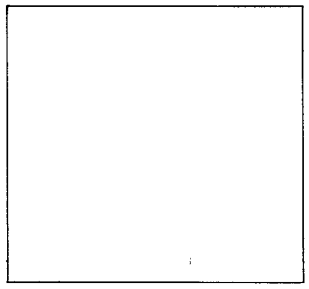
⌊_____⌋

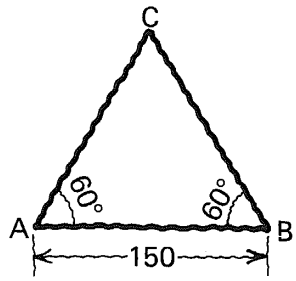


$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 - |\overrightarrow{AC}|^2}$$
$$= \sqrt{10.40^2 - 6.25^2}$$
$$\doteq \sqrt{108.16 - 39.06}$$
$$\doteq \sqrt{69.10}$$

8.31 unidades de longitud

98





Perímetro △ ABC

= [ ]

$\measuredangle C = 60°$ (T9)

△ABC es equiángulo

↓

△ABC es equilátero

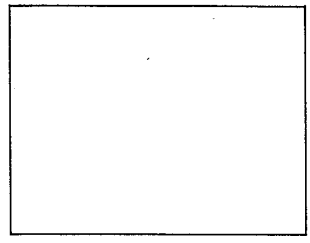
↓

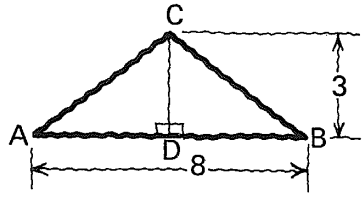
$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 150$

$3 \times 150 = 450$

99

$\measuredangle A = \measuredangle B$





Perímetro △ ABC

= [ ]

si $\measuredangle A = \measuredangle B$

$\overrightarrow{AC} \cong \overrightarrow{BC}$

△ABC es isósceles

$\overrightarrow{CD}$ es mediatriz de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} \cong \overrightarrow{DB}$

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = \frac{8}{2} = 4$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 3^2}$

$= \sqrt{25} = 5$

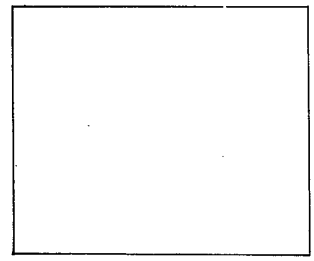
$8 + 5 + 5 = 18$

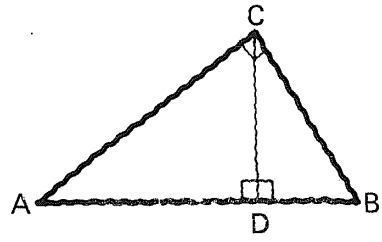
100

$\measuredangle C = 90°$

$|\overrightarrow{AD}| = 4$

$|\overrightarrow{DB}| = 3$





Perímetro △ ABC =

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{DB}|} = 2\sqrt{3}$

Por teorema media proporcional

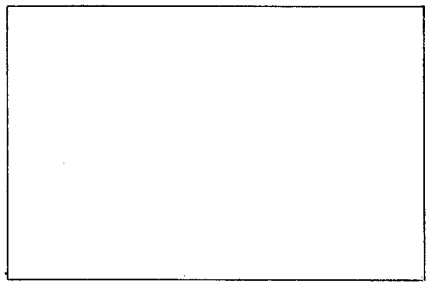
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2} = 2\sqrt{7}$

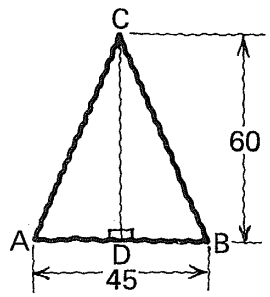
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{|\overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2} = \sqrt{21}$

$4 + 3 + 2\sqrt{7} + \sqrt{21} \doteq 16.87$

101

$\measuredangle A = \measuredangle B$





Perímetro $\triangle ABC =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente.

$\overleftrightarrow{AD} \cong \overleftrightarrow{DB}$ porque $\overleftrightarrow{CD}$ es mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$

$|\overleftrightarrow{AD}| = |\overleftrightarrow{DB}| = \frac{45}{2} = 22.5$

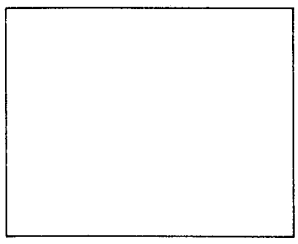
$\triangle ABC$ es isósceles

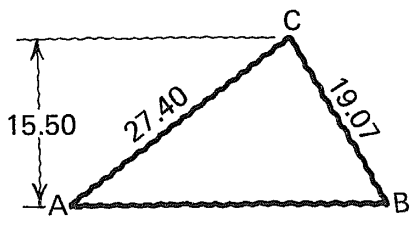
$$|\overleftrightarrow{AC}| = |\overleftrightarrow{BC}| = \sqrt{|\overleftrightarrow{AD}|^2 + |\overleftrightarrow{CD}|^2}$$
$$= \sqrt{22.5^2 + 60^2} = \sqrt{506.25 + 3600}$$
$$= \sqrt{4106.25} \doteq 64.08$$

Perímetro $\triangle ABC \doteq 45 + 2 \times 64.08 \doteq 45 + 128.16 \doteq 173.16$

102

15.50 es la medida de la altura correspondiente al vértice C.





Perímetro $\triangle ABC =$

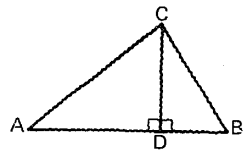
Respuesta en el cuadro siguiente.

$\overrightarrow{CD}$ divide al $\triangle ABC$ en dos triángulos rectángulos ADC y CDB.

en el $\triangle ADC$:

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{CD}|^2} = \sqrt{27.40^2 - 15.50^2} = \sqrt{750.76 - 240.25} = \sqrt{510.51} \doteq 22.59$

(Teorema de Pitágoras)



en el $\triangle CDB$:

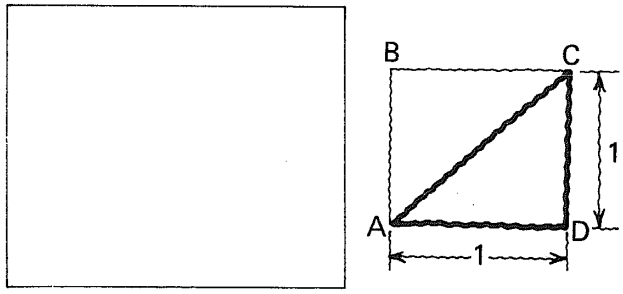
$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{|\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{CD}|^2} = \sqrt{19.07^2 - 15.50^2} = \sqrt{363.66 - 240.25} = \sqrt{123.41} \doteq 11.11$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{DB}| \doteq 22.59 + 11.11 \doteq 33.70$

Perímetro $\triangle ABC \doteq 27.40 + 19.07 + 33.70 \doteq 80.17$

103

ABCD es un cuadrado.



Perímetro $\triangle ACD =$ _____

$\overrightarrow{AC}$ es diagonal del cuadrado e hipotenusa del $\triangle ACD$

$\measuredangle ACD = 90°$ por definición de cuadrado

$\triangle ACD$ es rectángulo

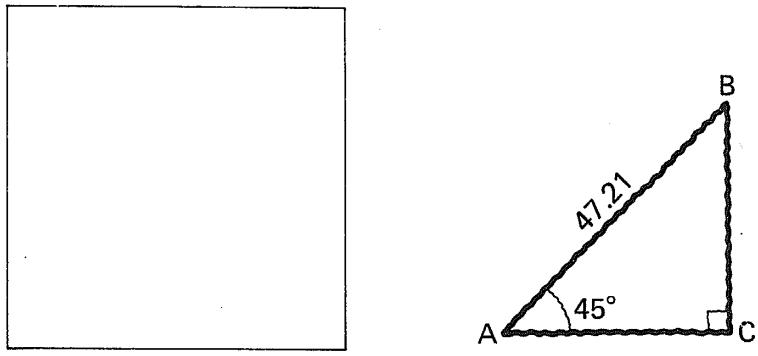
$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2}$

$= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1}$

$= \sqrt{2}$

$1 + 1 + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2} \doteq 3.41$

104



Perímetro $\triangle ABC =$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente.

$\measuredangle B = 45°$

$\triangle ABC$ es isósceles

$\downarrow$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ (T11)

$|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$ (teorema de Pitágoras)

$2|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2$

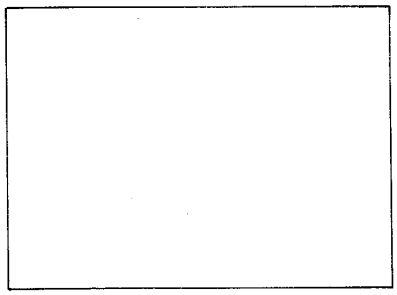
$$|\overrightarrow{AC}|^2 = \frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$$

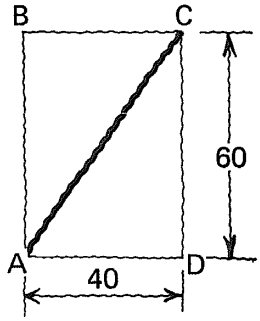
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\sqrt{2}} = \frac{47.21}{\sqrt{2}} \doteq 33.38$$

Perímetro $\triangle ABC \doteq 47.21 + 2 \times 33.38 = 113.98$

105

ABCD es un rectángulo.





Diagonal $\overrightarrow{AC}$ _____

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2}$$

(teorema de Pitágoras)

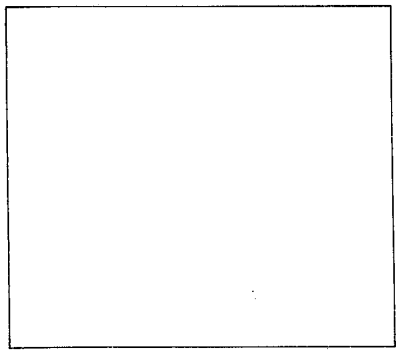
$$= \sqrt{40^2 + 60^2}$$

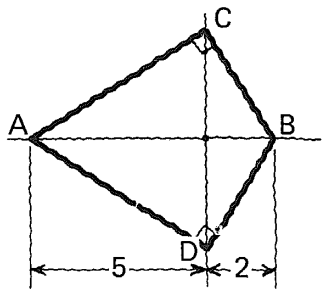
$$= \sqrt{1600 + 3600}$$

$$= \sqrt{5200}$$

$\doteq 72.11$

106





Perímetro ACBD = _____

Respuesta en el cuadro siguiente.

En el $\triangle ABC$:

$$|\overleftrightarrow{CE}| = \sqrt{|\overleftrightarrow{AE}| \cdot |\overleftrightarrow{EB}|} = \sqrt{5 \times 2} = \sqrt{10} \doteq 3.16$$

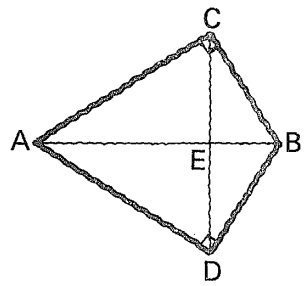
$$|\overleftrightarrow{AC}| \overset{(T20)}{=} \sqrt{|\overleftrightarrow{AE}|^2 + |\overleftrightarrow{CE}|^2} = \sqrt{5^2 + 3.16^2} \doteq \sqrt{34.99} \doteq 5.91$$

$$|\overleftrightarrow{BC}| \overset{(T21)}{=} \sqrt{|\overleftrightarrow{EB}|^2 + |\overleftrightarrow{CE}|^2} = \sqrt{2^2 + 3.16^2} \doteq \sqrt{13.99} \doteq 3.74$$

$\triangle ABC \cong \triangle ABD$ (T21)

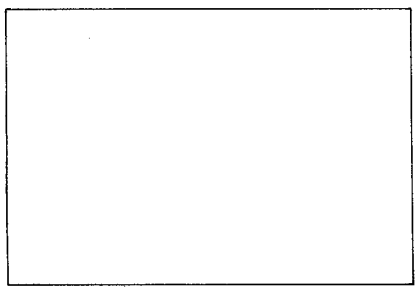
Perímetro ACBD $= |\overleftrightarrow{AC}| + |\overleftrightarrow{BC}| + |\overleftrightarrow{AD}| + |\overleftrightarrow{BD}|$

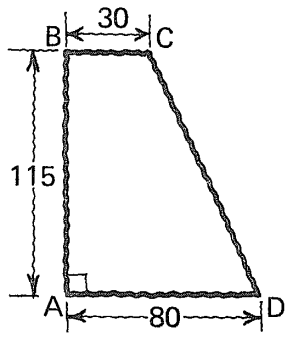
$\doteq 2 \times 5.91 + 2 \times 3.74 \doteq 19.30$



107

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$





Perímetro ABCD = ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente.

Trazamos:

$\overleftrightarrow{CE} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

Como $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{CE}$ (T8)

$<$ CED es recto.

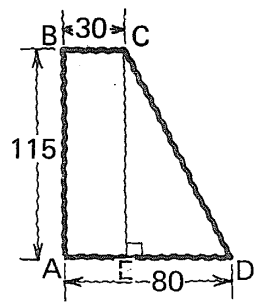
$\triangle$ CED es rectángulo.

$|\overleftrightarrow{CE}| = |\overleftrightarrow{AB}| = 115$ (T12)

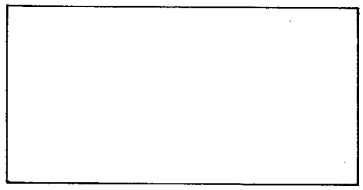
$|\overleftrightarrow{ED}| = |\overleftrightarrow{AD}| - |\overleftrightarrow{AE}| = 80 - 30 = 50$

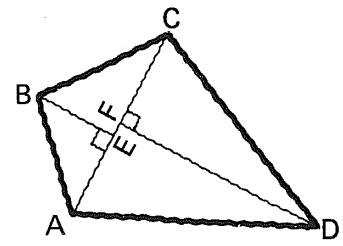
$|\overleftrightarrow{CD}| = \sqrt{|\overleftrightarrow{CE}|^2 + |\overleftrightarrow{ED}|^2}$ (T21) $= \sqrt{115^2 + 50^2} = \sqrt{15725} \doteq 125.40$

Perímetro ABCD $\doteq 115 + 30 + 125.40 + 80 \doteq 350.40$



Diagonal $|\overrightarrow{AC}| = 53.00$
Altura $|\overrightarrow{BE}| = 16.50$
Altura $|\overrightarrow{FD}| = 57.80$
$|\overrightarrow{AE}| = 20$
$|\overrightarrow{FC}| = 25.00$





Perímetro ABCD = [ ]

Respuesta en el cuadro siguiente.

En el Δ ABE: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2 + |\overrightarrow{BE}|^2} = \sqrt{20^2 + 16.50^2} \doteq 25.93$ (T21)

En el Δ BCE: $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{|\overrightarrow{EC}|^2 + |\overrightarrow{BE}|^2}$ (T21)

pero $|\overrightarrow{EC}| = |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AE}| = 53 - 20 = 33$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{33^2 + 16.50^2} = \sqrt{1\,089 + 272.25} = \sqrt{1\,361.25} \doteq 36.90$

En el Δ AFD: $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{FC}|$

$|\overrightarrow{AF}| = 53 - 25 = 28$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AF}|^2 + |\overrightarrow{FD}|^2} = \sqrt{28^2 + 57.80^2} \doteq 64.22$

En el Δ FCD: $|\overrightarrow{CD}| \doteq 62.97$

Perímetro ABCD $\doteq 25.93 + 36.90 + 64.22 + 62.97 \doteq 190.02$

4.7.3.1

Práctica adicional, si se considera necesario

109

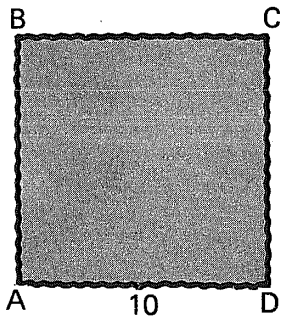
Área de una región cuadrada
de lado a = ⌊_____⌋

a^2

110

Área de
la región cuadrada ABCD

= ⌊_____⌋

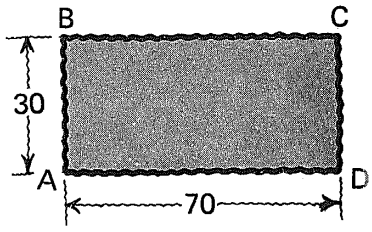


10x10 = 100

111

Área de
la región rectangular ABCD

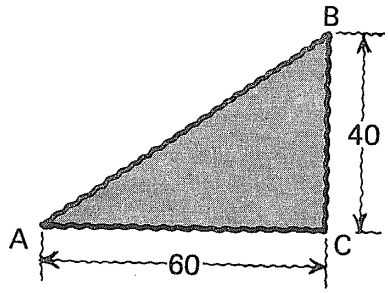
= ⌊_____⌋



70x30 = 2100

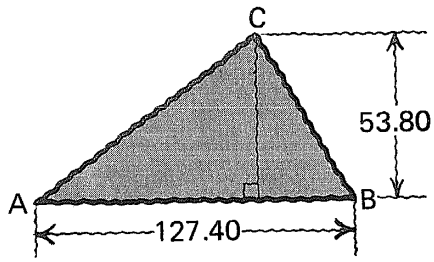
112

$\measuredangle C = 90°$
área de
la región
triangular
ABC = [ ]



$$\frac{60 \times 40}{2} = 1200$$

113



53.80 es la altura del vértice C.

Área de $\triangle ABC$ = [ ]

$$\frac{127.40 \times 53.80}{2}$$

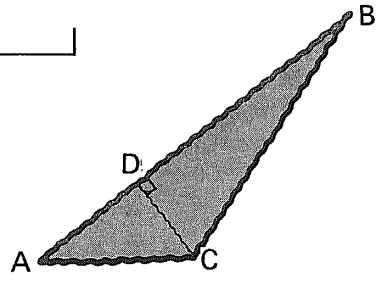
$\doteq$ 3 427.06

114

$|\overline{CD}|$ = medida de la altura correspondiente
al vértice C = 5.20

$|\overline{AB}| = 32.06$

Área de $\triangle ABC$ = [ ]

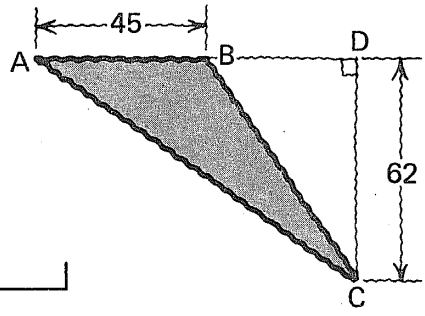


$$\frac{32.06 \times 5.20}{2} \doteq 83.36$$

115

$\overleftrightarrow{CD}$ es la altura del vértice C, cuya medida es 62.

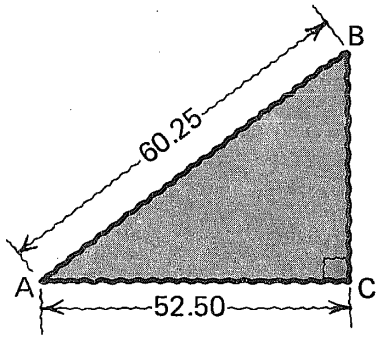
Área de ▲ABC = ⌊_____⌋



$$\frac{45 \times 62}{2} = 1\,395$$

116

Área ▲ABC = ⌊_____⌋



$$|\overleftrightarrow{BC}| = \sqrt{|\overleftrightarrow{AB}|^2 - |\overleftrightarrow{AC}|^2} \quad \text{(T21)}$$

$$= \sqrt{60.25^2 - 52.50^2}$$

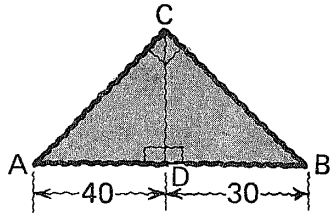
$$\doteq \sqrt{3\,630.06 - 2\,756.25}$$

$$\doteq \sqrt{873.81} \doteq 29.56$$

$52.50 \times 29.56/2 \doteq 775.95$

117

Área ▲ABC = ⌊_____⌋



$$|\overleftrightarrow{CD}| = \sqrt{|\overleftrightarrow{AD}| \cdot |\overleftrightarrow{DB}|} \quad \text{(T20)}$$

$$= \sqrt{40 \times 30}$$

$$= \sqrt{1\,200}$$

$$\doteq 34.64$$

$$\frac{70 \times 34.64}{2} = 1\,212.40$$

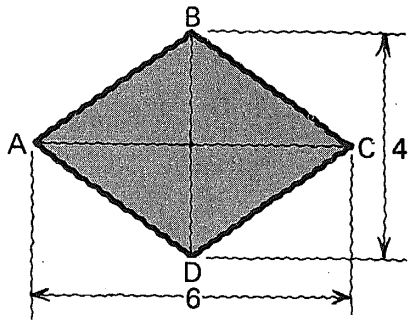
118

Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

y $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

el cuadrilátero ABCD es un



y el área de la región poligonal que determina es igual a:

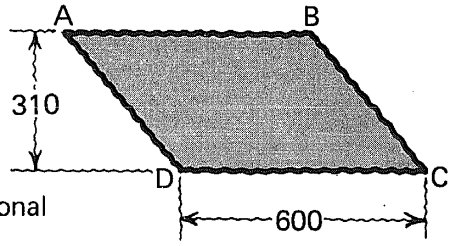
rombo

$\frac{6 \times 4}{2} = 12$

119

Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC} \wedge \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

ABCD es un



y el área de la región poligonal correspondiente es igual a:

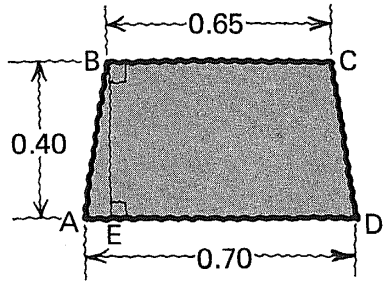
paralelogramo

$600 \times 310 = 186\,000$

120

Si $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

ABCD es un



y el área de la región que determina es igual a:

trapecio

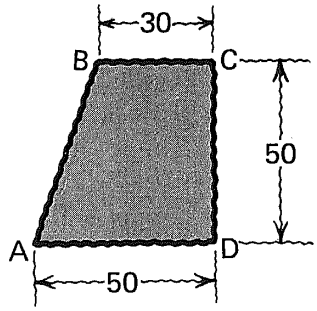
$\frac{(0.70 + 0.65)\ 0.40}{2} = 0.27$

121

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AD}$

Área de la región trapecial ABCD = ⌊_____⌋

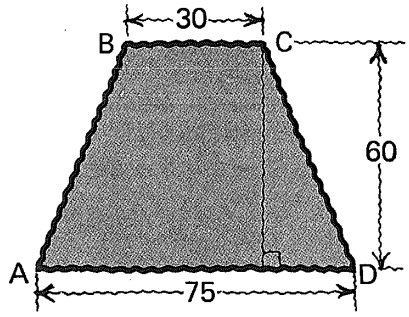


$\frac{(50 + 30)\ 50}{2} = 2\,000$

122

$\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD}$

Área de la región trapecial ABCD = ⌊_____⌋



$\frac{(75 + 30) \times 60}{2} = 3\,150$

123

Si $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{AD} \wedge \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

ABCD es un ⌊_____⌋

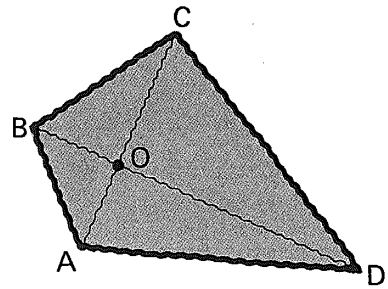
Si $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$|\overrightarrow{BO}| = 25$

$|\overrightarrow{OD}| = 50$

$|\overrightarrow{AD}| = 15$

$|\overrightarrow{OC}| = 30$



Área de la región cuadrangular ABCD es igual a: ⌊_____⌋

cuadrilátero no trapecio

$\frac{75 \times 30}{2} + \frac{75 \times 15}{2}$

$= \frac{75(30 + 15)}{2} = 1687.50$

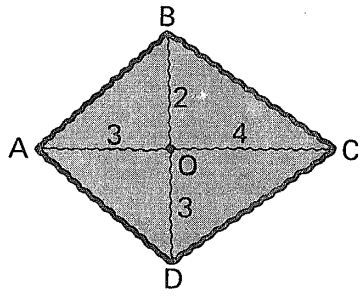
124

$\overleftrightarrow{AC} + \overleftrightarrow{BD}$

El área de la

región [_____] ABCD

es igual a: [_____]



cuadrangular

$\frac{7 \times 5}{2} = 17.50$

125

$|\overrightarrow{AC}| = 47.50$

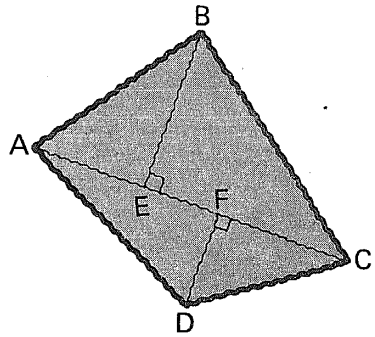
$|\overrightarrow{BE}| = 32.75$

$|\overrightarrow{FD}| = 14.20$

Área de la

región [_____] ABCD

es igual a: [_____]



cuadrangular

$\frac{47.50 \times 32.75}{2} + \frac{45.50 \times 14.20}{2} \doteq 1115.06$

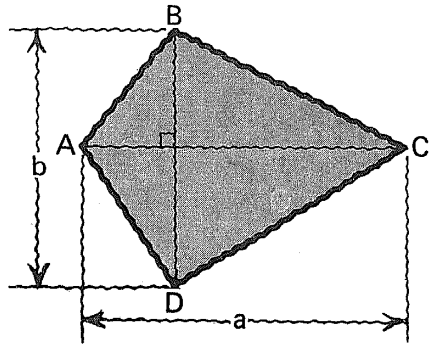
126

Área de la región cuadrangular ABCD

= [_____]

siendo

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$

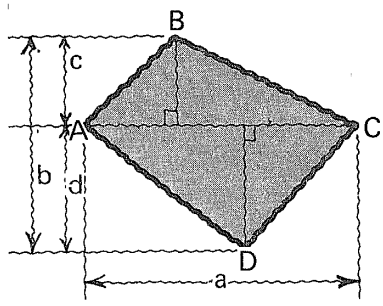


$\frac{ab}{2}$

127

Área de la región cuadrangular ABCD

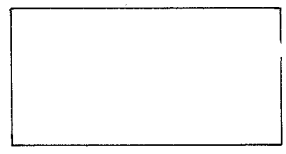
$= \square$

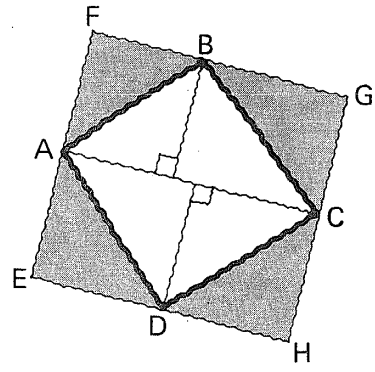


$$\frac{ac}{2} + \frac{ad}{2} = \frac{a(c+d)}{2} = \frac{ab}{2}$$

128

Observemos la relación entre el area de la región cuadrangular ABCD y el área de la región rectangular EFGH, en que $\overleftrightarrow{FG} \parallel \overleftrightarrow{EH} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ $\overleftrightarrow{FE} \perp \overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{GH} \perp \overleftrightarrow{AC}$.





Área región cuadrangular ABCD $= \frac{1}{2}$ área región rectangular EFGH

129

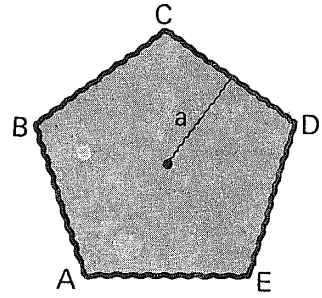
ABCDE es un pentágono regular convexo en que

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}|$
$= |\overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{EA}| = 6$

y apotema $a \doteq 4.13$

Área de la región poligonal ABCDE

$= \square$



$$A = \frac{pa}{2}$$

en que

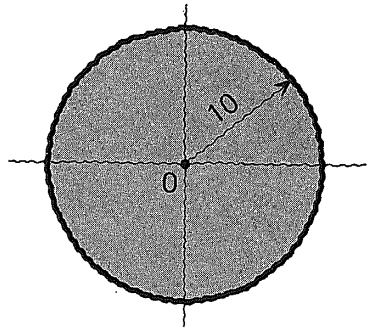
p = perímetro
y a = apotema

$$A = \frac{5 \times 6 \times 4.13}{2}$$

$\doteq 61.95$

130

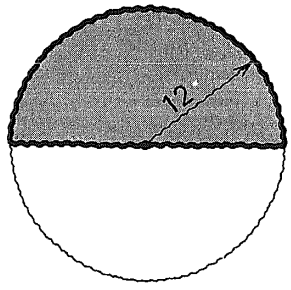
A = ⌊_____⌋



$\pi \times 10^2 \doteq 314.16$

131

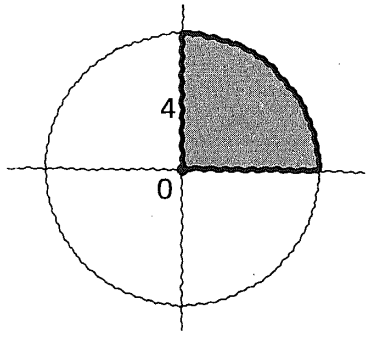
A = ⌊_____⌋



$\frac{\pi \times 12^2}{2} \doteq 226.20$

132

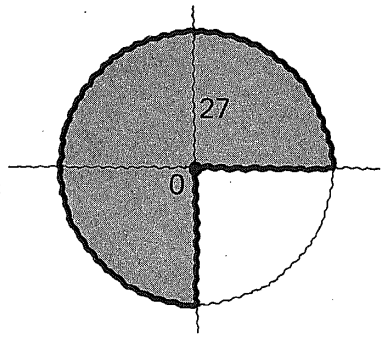
A = ⌊_____⌋



$\frac{\pi \times 4^2}{4} \doteq 12.57$

133

A = _____



$$\frac{3}{4} \times \pi \times 27^2$$

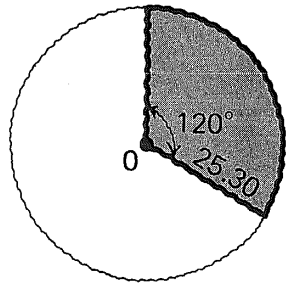
$$= \frac{3 \times \pi\ 27^2}{4} \doteq 1\,717.67$$

134

A = _____

Una región como la representada recibe el nombre de

sector circular.

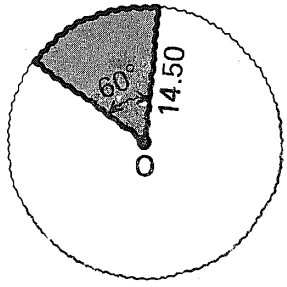


$$\frac{\pi \times 2530^2}{3} \doteq 670.30$$

puesto que $\frac{120}{360} = \frac{1}{3}$

135

A = _____

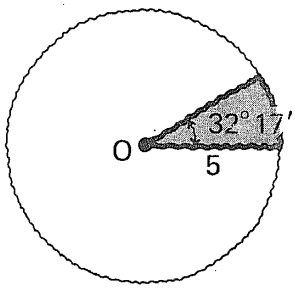


$$\frac{\pi \times 14.50^2}{6} \doteq 110.09$$

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

136

A = ⌊_____⌋



$0.09 \times \pi \times 5^2 \doteq 7.07$

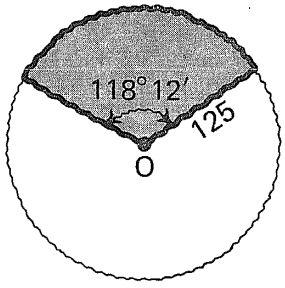
$17' \doteq 0.28°$ $(17'/60')$

$32°\ 17' \doteq 32.28°$

$\frac{32.28°}{360°} \doteq 0.09$

137

A = ⌊_____⌋



$0.33 \times \pi \times 125^2 \doteq 16198.88$

$12' \doteq 0.20°$ $(12'/60')$

$118°\ 12' = 118.2°$

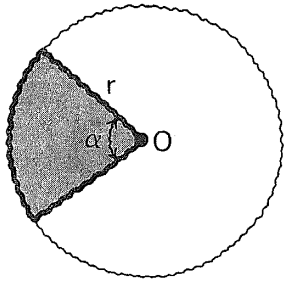
$\frac{118.2°}{360°} \doteq 0.33$

138

En general.

Área de un sector circular.

A = ⌊_____⌋



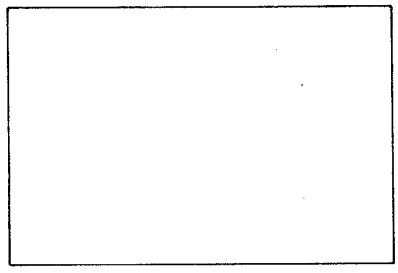
$\frac{\measuredangle\, \alpha \pi r^2}{360°}$

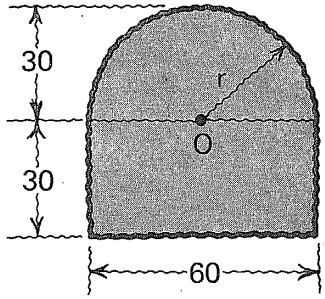
en que:

$\measuredangle\, \alpha$ está dado en grados

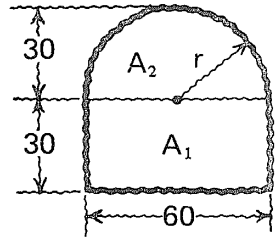
139

Área de la región representada:





$A =$ ⌊_____



$A_1 = 60 \times 30 = 1\,800$

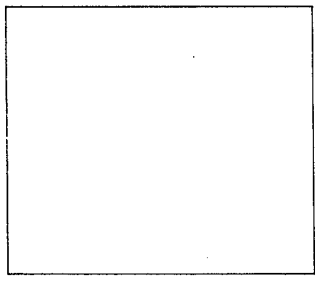
$A_2 = \frac{\pi \times 30^2}{2} = 1\,413.72$

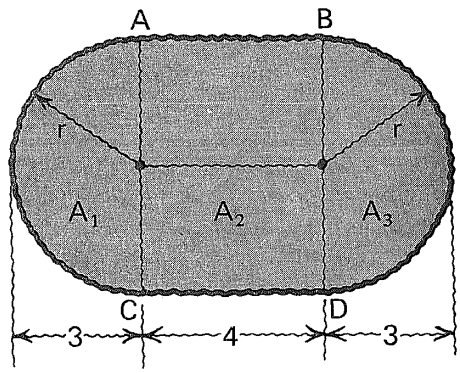
$A = A_1 + A_2$

3 213.72

140

$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$





$A \doteq$ ⌊_____

$A_1 = A_2 = \frac{\pi \times 3^2}{2} \doteq 14.14$

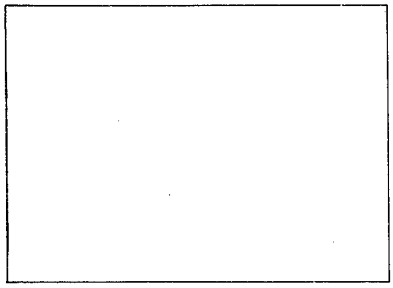
$A_3 = 4 \times 6 = 24$

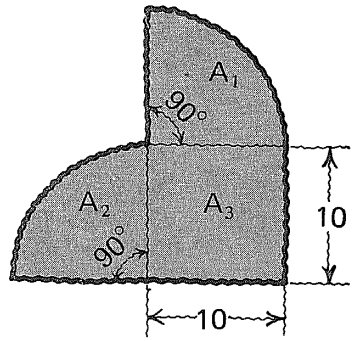
$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\doteq 14.14 + 14.14 + 24$

52.28

141





$A \doteq$ ⌊_____

$A_1 = A_2 = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} \doteq 78.54$

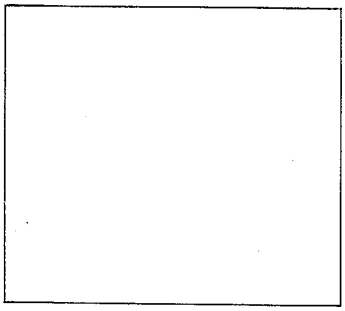
$A_3 = 10^2 = 100$

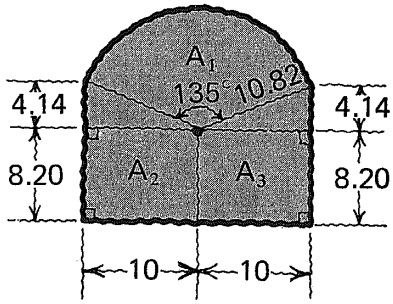
$A = A_1 + A_2 + A_3$

$\doteq 78.54 + 78.54 + 100$

257.08

142





A ≐ ⌊_____⌋

$A_1 \doteq 137.92$

$A_2 = A_3 \doteq 102.70$

$A = A_1 + A_2 + A_3$

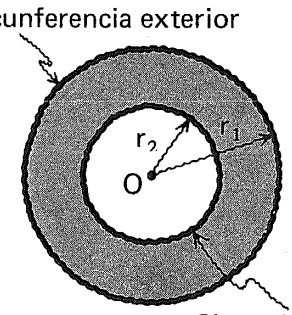
343.32

143

Área de un

anillo circular.

A= ⌊_____⌋



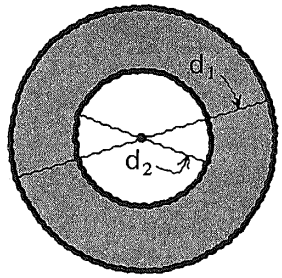
$\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\ (r_1^2 - r_2^2)$

144

Área de un

anillo circular.

A = ⌊_____⌋



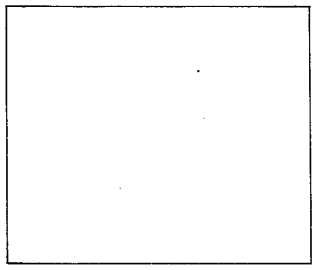
para cualquier círculo:

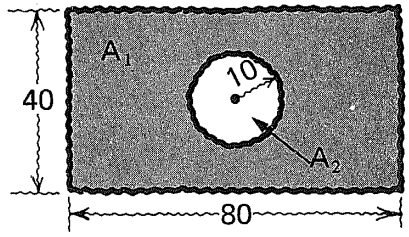
$A = \frac{\pi d^2}{4}$

para el anillo circular representado:

$\frac{\pi d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_1^2 - d_2^2)$

A_1 es el área del rectángulo.





A = ⌊_____⌋

$A = A_1 - A_2$

$A_1 = 80 \times 40 = 3200$

$A_2 = \pi \times 10^2 \doteq 314.16$

$A = 3\,200 - 314.16$

2 885.84

4.7.3.2

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

4.7.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* los perímetros de triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y figuras planas compuestas por algunas de las anteriores,
- *determinar* las áreas de triángulos cuadriláteros, polígonos regulares y figuras planas compuestas por algunas de las anteriores.

7.4

Perímetros y áreas de figuras semejantes.

146

Consideremos la cadena de proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = r$$

en que **r** es la razón de proporcionalidad.

Se verifica que:

$$\frac{a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{b + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n} = r$$

147

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0.50$$

¿Se verifica $\dfrac{1 + 2 + 3 + 4}{2 + 4 + 6 + 8} = 0.50$?

Sí/No

$$\frac{10}{20} = 0.50$$

Sí

148

$$\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = 3$$

¿Se verifica $\dfrac{3+6+9+12}{1+2+3+4} = 3$?

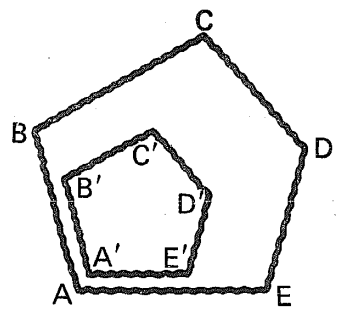
Sí/No

$$\frac{30}{10} = 3$$

Sí

149

Consideremos, ahora, dos polígonos semejantes, ABCDE y A'B'C'D'E'.



De acuerdo con la definición de polígonos semejantes, debe verificarse que:

$$\angle A \cong \angle A' \wedge \angle B \cong \angle B' \wedge \angle C \cong \angle C' \wedge \angle D \cong \angle D' \wedge \angle E \cong \angle E'$$

y

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|} = \frac{|\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{E'A'}|} = r$$

150

Si $$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{C'D'}|} = \frac{|\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{D'E'}|} = \frac{|\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{E'A'}|} = r$$

debe verificarse, de acuerdo con la propiedad de las proporciones que hemos estudiado:

$$\frac{|AB| + |BC| + |CD| + |DE| + |EA|}{|\overrightarrow{A'B'}| + |\overrightarrow{B'C'}| + |\overrightarrow{C'D'}| + |\overrightarrow{D'E'}| + |\overrightarrow{E'A'}|} = r$$

151

En la expresión

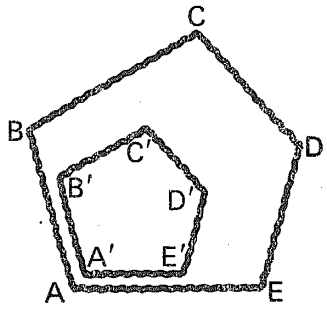
$$\frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{DE}| + |\overrightarrow{EA}|}{|\overrightarrow{A'B'}| + |\overrightarrow{B'C'}| + |\overrightarrow{C'D'}| + |\overrightarrow{D'E'}| + |\overrightarrow{E'A'}|} = r$$

el numerador representa:

[ ]

y el denominador representa:

[ ]



el perímetro ABCDE

el perímetro A'B'C'D'E'

152

Entonces,

$$\frac{\text{perímetro del polígono ABCDE}}{\text{perímetro del polígono A'B'C'D'E'}} = r$$

o bien,

perímetro de ABCDE = [ ]

r es la razón de semejanza del polígono ABCDE al polígono A'B'C'D'E'

r X perímetro A'B'C'D'E'

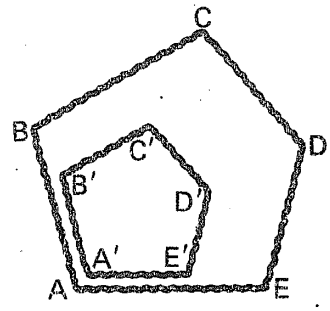
153

Si, por ejemplo,
la razón del polígono ABCDE al polígono A'B'C'D'E' es igual a 2.

$r = 2$

y sabemos que
el perímetro de A'B'C'D'E' es igual a 127 metros
entonces, el perímetro de ABCDE es igual a

[ ]



2 X 127 = 254 metros

154

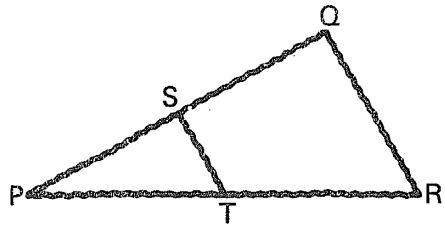
Sabemos que:

$\triangle PQR \sim \triangle PST$

y

$\frac{|\overrightarrow{PT}|}{|\overrightarrow{PR}|} = 0.3$

y



perímetro del $\triangle PQR = 28$

entonces,

perímetro del $\triangle PST$

= [ ]

$0.3 \times 28 = 8.4$

155

Sabemos que:

$\triangle PQR \sim \triangle RST$

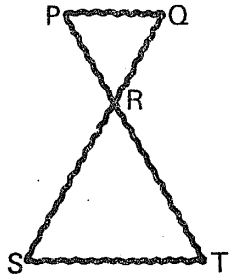
$|\overrightarrow{RS}| = 2.5|\overrightarrow{QR}|$

y perímetro de $\triangle RST = 1\,085$ cm;

entonces,

el perímetro de $\triangle PQR$ =

[ ]



si $|\overrightarrow{RS}| = 2.5|\overrightarrow{QR}|$

entonces

$\frac{|\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{RS}|} = \frac{1}{2.5} = 0.4$

razón de semejanza del $\triangle PQR$ al $\triangle RST$ es igual a 0.4 y

perímetro de $\triangle PQR = 0.4 \times 1085$

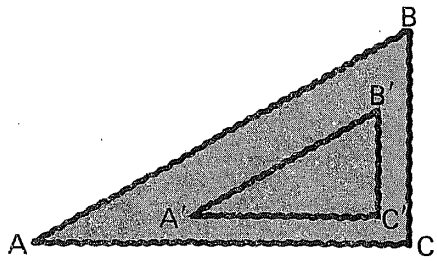
434 cm

156

Ahora,
consideremos
los dos triángulos
rectángulos
semejantes ABC y A'B'C'.

Área de ▲ABC

= [ ]

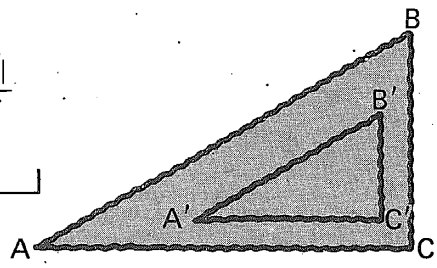


$\frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2}$

157

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2}$$

$$\text{Área } \triangle A'B'C' = \text{└\_\_\_\_\_}$$



$$\frac{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{B'C}|}{2}$$

158

$$\text{Área } \triangle ABC = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2}$$

$$\text{Área } \triangle A'B'C' = \frac{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}|}{2}$$

$$\frac{\text{Área } \triangle ABC}{\text{Área } \triangle A'B'C'} = \text{└\_\_\_\_\_}$$

- $\dfrac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{2}$
- $\dfrac{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}|}{2}$

$$= \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{|A'C'| \cdot |B'C'|}$$

159

$$\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|}$$

Ahora,

si $\dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} = \dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{A'B'}|} = r$

entonces,

$$\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = \frac{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{A'C'}| \cdot |\overrightarrow{B'C'}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{A'C'}|} \cdot \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{B'C'}|} = \text{└\_\_\_\_}$$

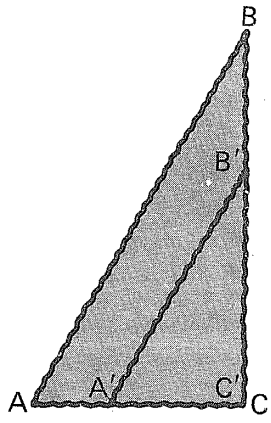
$r \cdot r = r^2$

160

$$\frac{\text{área } \triangle ABC}{\text{área } \triangle A'B'C'} = r^2$$

o bien,

$$\text{área } \triangle ABC = r^2 \cdot \text{área } \triangle A'B'C'$$



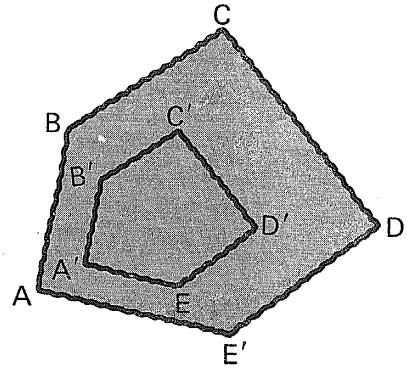
161

Esto puede generalizarse para cualquier par de polígonos semejantes.

$$\frac{\text{área región poligonal ABCDE}}{\text{área región poligonal A'B'C'D'E'}} = r^2$$

en que

r = razón de semejanza del polígono ABCDE al polígono A'B'C'D'E'.



162

Si, por ejemplo:

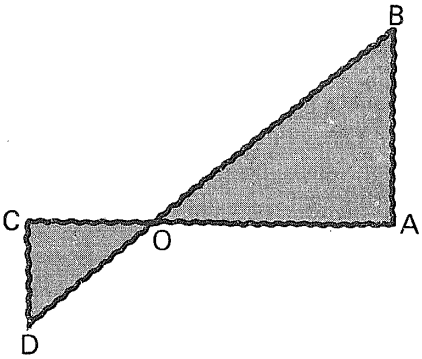
$\triangle OAB \sim \triangle OCD$

$$\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 0.60$$

área $\triangle OAB$ = 10 unidades^2

entonces,

área $\triangle OCD$ =



$0.60^2 \times 10 = 0.36 \times 10$
$= 3.60$ unidad^2

4.7.4.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

4.7.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el área de un polígono a partir del área de otro polígono semejante a él y de la razón de semejanza.

- *determinar* el área de un polígono a partir del área de otro polígono semejante a él y de la razón de semejanza.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 10 de mayo de 1984,
en los talleres de Impresora Lorenzana, S. A.,
Cafetal núm. 661, Col. Granjas México,
se encuadernó en Servicios Editoriales Profesionales, S. A.,
Av. 5 de Mayo núm. 495, Col. Merced Gómez,
Deleg. Álvaro Obregón, 01600, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100